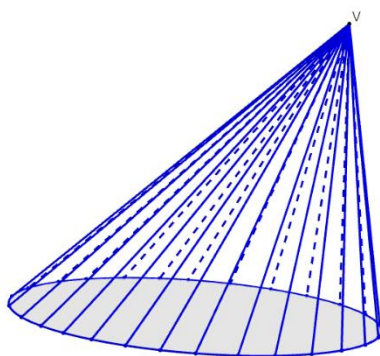
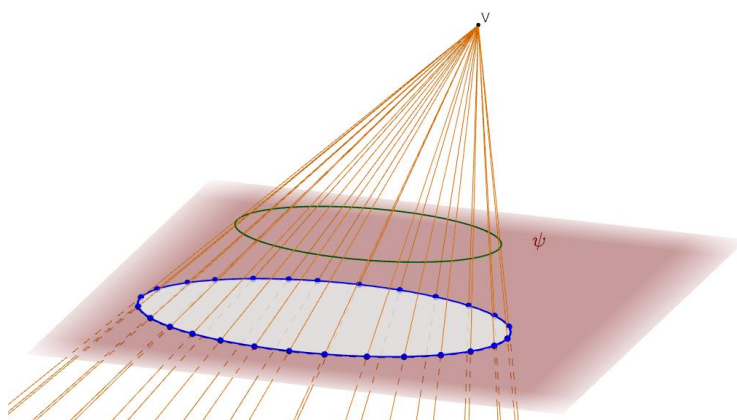
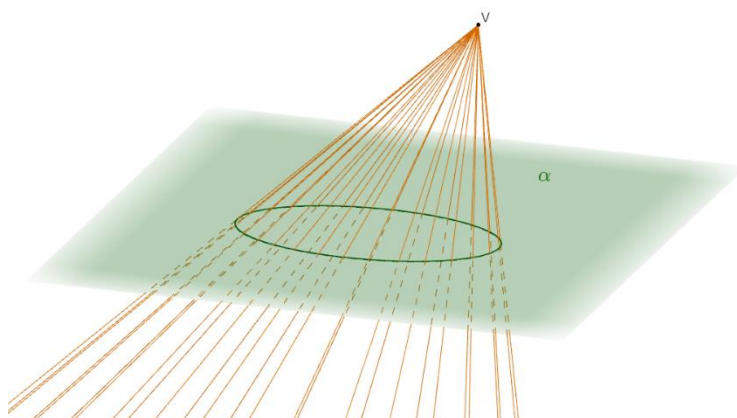


Povrch a objem kužeľa

D. Daný je krivkami ohraničený rovinný útvar (*riadiaci* alebo *určujúci útvar*) a jeden bod (*vrchol*), ktorý neleží v rovine rovinného útvaru. Ak hraničnými bodmi útvaru vedieme polpriamky s počiatočným bodom V , vznikne nekonečná kužeľová plocha – nekonečný kužeľ. Ak teraz zoberieme rovinu, ktorá prechádza kužeľovou plochou, vznikne *kužeľ*, ako časť nekonečnej kužeľovej plochy medzi rovinou a vrcholom.



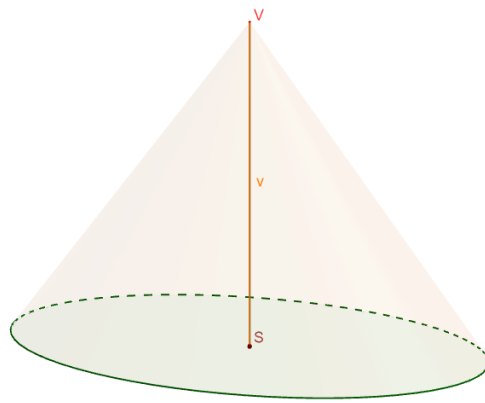
podstava – krivkami ohraničený rovinný útvar

výška telesa: v – vzdialenosť vrcholu od podstavy

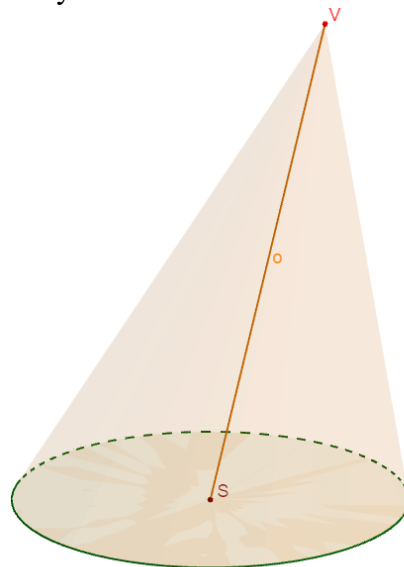
strana kužeľa – spojnica hraničného bodu podstavy s vrcholom ihlana

plášť kužeľa – súhrn strán

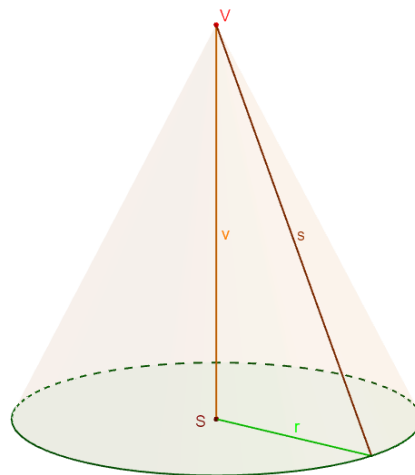
kolmý kužeľ – spojnica vrchol-stred podstavy (ťažisko) je kolmá na podstavu (totožná s výškou)



kosý (šikmý) kužel – ak kužel nie je kolmý



rotačný kužel – kolmý kužel s kruhovou podstavou: plášť je kruhový výsek
osový rez je rovnoramenný trojuholník



všeobecný kužel:

$$S = S_p + S_{pl}$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

rotačný kužel:

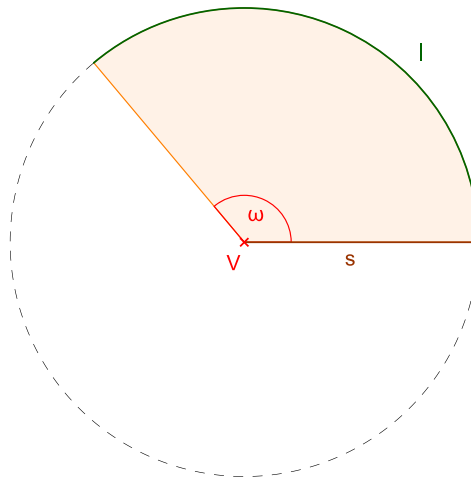
$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$s^2 = r^2 + v^2$$

Dô.

obsah plášte vypočítame ako obsah kruhového výseku



dĺžka kružnicového oblúka (polomer kruhového výseku sa rovná strany rotačného kužeľa: s) je vlastne obvod podstavy

$$l = \frac{2\pi s}{360^\circ} \cdot \omega$$

$$o = 2\pi r$$

$$l = o \Rightarrow \frac{2\pi s}{360^\circ} \cdot \omega = 2\pi r$$

z tohto vzťahu vyjadríme stredový uhol

$$\frac{2\pi s}{360^\circ} \cdot \omega = 2\pi r \quad /: 2\pi$$

$$\frac{s}{360^\circ} \cdot \omega = r \quad / \cdot \frac{360^\circ}{s}$$

$$\omega = \frac{r \cdot 360^\circ}{s}$$

obsah kruhového výseku

$$S_{pl} = S_{KV} = \frac{\pi s^2}{360^\circ} \cdot \omega$$

dosadíme stredový uhol

$$S_{pl} = \frac{\pi s^2}{360^\circ} \cdot \frac{r \cdot 360^\circ}{s}$$

$$S_{pl} = \pi \cdot s \cdot r$$

príklad:

Daný je rotačný kužeľ: $r = 3,7$; $v = 8,8$. Vypočítajte objem a povrch.

vypočítame obsah podstavy (kruhu)

$$S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 3,7^2 = 43,008$$

z toho môžeme objem

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 43,008 \cdot 8,8$$

$$V = 126,158$$

na výpočet povrchu plášťa (kruhového výseku) potrebujeme vypočítať stranu

$$s^2 = r^2 + v^2 = 3,7^2 + 8,8^2 = 13,69 + 77,44 = 91,13$$

$$s = 9,546$$

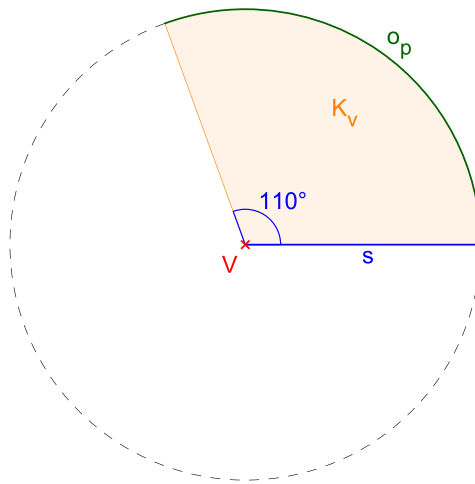
$$S_{pl} = \pi r s = \pi \cdot 3,7 \cdot 9,546 = 110,964$$

povrch je súčet obsahu podstavy a plášťa

$$S = S_p + S_{pl} = 43,008 + 110,964$$

$$S = 153,972$$

Z kruhového plechu s polomerom dĺžky 3 treba vystrihnúť časť so stredovým uhlom 110° , zvinúť a zospájkovať do tvaru kužeľa. Vypočítajte objem kužeľa.



polomer pôvodného kruhu (kruhového výseku) bude strana rotačného kužeľa

$$r' = s = 3$$

dĺžka kružnicového oblúka (hranica výseku) sa rovná obvodu podstavy kužeľa

$$o_p = l = \frac{2\pi r'}{360^\circ} \cdot \omega = \frac{2\pi \cdot 3}{360^\circ} \cdot 110^\circ = 5,760$$

z obvodu vieme vypočítať polomer podstavy

$$o_p = 2\pi r \rightarrow r = \frac{o_p}{2\pi} = \frac{5,760}{2\pi} = \frac{11}{12} = 0,91\bar{6}$$

ešte výšku telesa treba určiť

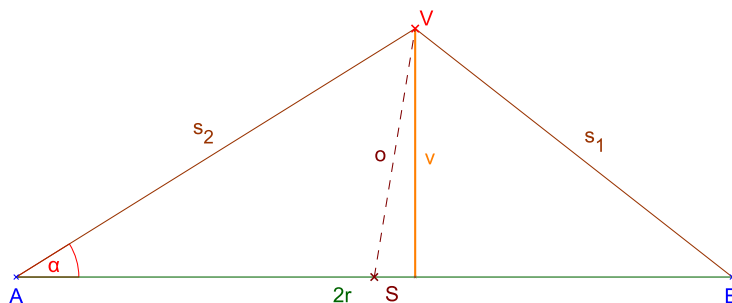
$$v^2 = s^2 - r^2 = 3^2 - 0,91\bar{6}^2 = 9 - 0,840 = 8,160$$

$$v = 2,857$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot 0,917^2 \cdot 2,86$$

$$V = 2,514$$

Určte objem kosého kruhového kužeľa, ak je polomer podstavy 32, dĺžka najkratšej strany 36, najdlhšej strany 42.



osový rez kužeľa je všeobecný trojuholník – poznáme všetky strany \Rightarrow kosínusovou vetou vypočítame uhol oproti výšky telesa

$$s_1^2 = (2r)^2 + s_2^2 - 2 \cdot 2r \cdot s_2 \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{4r^2 + s_2^2 - s_1^2}{4rs_2} = \frac{4 \cdot 32^2 + 42^2 - 36^2}{4 \cdot 32 \cdot 42} = \frac{4564}{5376} = \frac{163}{192} = 0,8490$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,8490 = 31^\circ 54'$$

v pravouhlom trojuholníku použijeme goniometrickú funkciu na výpočet výšky telesa

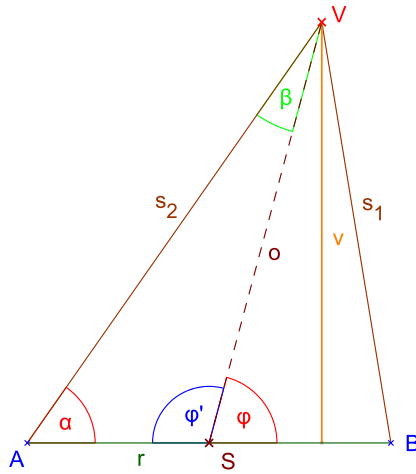
$$\sin \alpha = \frac{v}{s_2} \rightarrow v = s_2 \cdot \sin \alpha = 42 \cdot \sin 31^\circ 54' = 22,195$$

a môžeme dosadiť do vzorca

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot 32^2 \cdot 22,195$$

$$V = 23\,800,7$$

Kosý kruhový kužeľ má polomer podstavy 15. Najdlhšia strana má od podstavy odchýlku 55° . Odchýlka osi od podstavy je 75° . Vypočítajte objem kužeľa.



označme uhly: $\alpha = 55^\circ$; $\varphi = 75^\circ$

osový rez kužela je všeobecný trojuholník – vypočítame tretí uhol

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi') = 180^\circ - (55^\circ + 105^\circ) = 20^\circ$$

vo všeobecnom trojuholníku sínusovou vetou vypočítame najprv najdlhšiu stranu s_2

$$\frac{s_2}{\sin \varphi'} = \frac{r}{\sin \beta} \rightarrow s_2 = \frac{r \cdot \sin \varphi'}{\sin \beta} = \frac{15 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 20^\circ} = 42,363$$

potom v pravouhlom trojuholníku využijeme goniometrickú funkciu

$$\sin \alpha = \frac{v}{s_2} \rightarrow v = s_2 \cdot \sin \alpha = 42,363 \cdot \sin 55^\circ = 34,701$$

takže objem

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{1}{3} \pi \cdot 15^2 \cdot 34,70$$

$$V = 8\,176,3$$