

## Kombinatorika

Kombinatorika sa zaoberá s konečnými množinami (množina s konkrétnym počtom prvkov), z nich vytváranými objektmi – určením počtu tých objektov. Rozdiely v počtoch objektov vzniknú v závislosti od toho, či berieme do úvahy usporiadanie tých prvkov alebo nie (vytvárame usporiadané k-tice alebo iba k-prvkové podmnožiny); takisto aj z toho, či prvky môžeme použiť aj viackrát alebo nie.

Kombinatoriku volajú aj teóriou konečných množín.

Niektoré príklady sa dajú riešiť aj bez poznatkov z kombinatoriky – bez toho aby človek poznal pojmy: variácie, kombinácie, permutácie, s opakovaním, bez opakovania, ... – úvahou. Iba to treba vedieť, kedy máme hodnoty vynásobiť a kedy sčítať.

### príklad:

I. Triedny na konci školského roka odmení troch žiakov knižnými odmenami. Preto kúpil tri rôzne knihy. Nakoľko v triede každý žiak bol šikovný, a dosiahli dobré výsledky, náhodným výberom rozdelí tie odmeny. Koľkými rôznymi spôsobmi môže to urobiť v triede s počtom žiakov 32, ak každú knihu má dostať iný žiak?

Ak správne uvažujeme, nepotrebujeme poznať, že sú to variácie tretej triedy z 32 prvkov bez opakovania. Poďme na to postupne – učiteľ za sebou vylosuje mená z urny obsahujúcej mená všetkých žiakov:

prvú knihu môže rozdať 32-mi spôsobmi: na začiatku losovania v urne sú cedulky so všetkými menami žiakov triedy → keď prvý už dostal knihu, jeho meno už bude chýbať pri ďalších losovaniach preto druhú knihu už iba 31-mi spôsobmi môže rozdať

a poslednú, tretiu iba 30-mi spôsobmi

Čo teraz máme urobiť tými číslami? Triedny mohol to urobiť aj naraz: naraz vytiahnuť tri cedulky z urny. Čiže to môžeme považovať za jeden jav, my sme ho iba rozdelili. Preto tieto možnosti (čísla) treba vynásobiť.

$$32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$$

II. Zmeňme úlohu tak, že tie knihy budú rovnaké. Ako sa mení hodnota?

Nejak to súvisí s predchádzajúcim príkladom. Ale ako, a ako nám to pomôže vo výpočte?

Predstavte si, že učiteľ podobne postupuje pri rozdávaní.

Zoberme jednu trojicu mien (nahraďme písmenami A B a C). Ak pri losovaní vylosujeme ich v poradí A-B-C, alebo A-C-B; alebo v inakšom poradí, vlastne vždy tá istá trojica dostane tie rovnaké knihy – nič sa nezmení, výsledok je rovnaký. Čiže ten predchádzajúci výsledok máme deliť. A presne akým číslom? Tým číslom, koľkými spôsobmi môžeme usporiadať tri prvky.

A-B-C	A-C-B
B-A-C	B-C-A
C-A-B	C-B-A

$$32 \cdot 31 \cdot 30 : 6 = 4\,960$$

III. Zmeňme pôvodnú úlohu tak, že žiak môže dostať aj viac kníh. Teraz ako sa mení hodnota?

V tomto prípade ak žiak dostal bol vylosovaný v prvom kole, jeho cedulka sa vráti späť do urny a môže byť znovu vylosovaný. Čiže v každom losovaní 32-mi spôsobmi môžeme rozdať knihu.

$$32 \cdot 32 \cdot 32 = 32^3 = 32\,768$$

IV. Piaty kamaráti išli spolu do kina, a kúpili lístky vedľa seba. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu obsadiť svoje miesta?

Aj tento problém riešime postupne.

prvý si môže vybrať z piatich sedadiel → obsadí jedno a tak ostanú iba štyri voľné

druhý vyberá zo štyroch

tretí z troch; štvrtý z dvoch a poslednému ostane iba jedna možnosť

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

V. Koľko rôznych štvor- a päťciferných čísel môžeme vytvoriť z číslic: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, ak jednotlivé číslice sa nemôžu opakovať v číslach?

Vytvorené číslo buď bude štvorciferné alebo päťciferné. Preto tie počty zvlášť vypočítame, a potom ich sčítame – tie dva javy sa nemôžu nastať naraz, preto tie možnosti treba sčítať a nie násobiť.

začneme so štvorcifernými – a to od začiatku

na prvé miesto (prvú pozíciu – tisícky) máme možnosť vyberať zo siedmych číslíc: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7  
– nula nemôže byť na začiatku, lebo potom by číslo bolo iba trojciferné

druhé miesto môžeme obsadiť znovu siedmymi spôsobmi – jedna číslica zo siedmych už bola použitá, ale pribudne nula

na tretiu pozíciu zo šiestich; a na štvrtú z piatich môžeme vyberať

$$7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,470$$

pokračujeme päťcifernými

prvé miesto: sedem možností (bez nuly); druhé: sedem (s nulou); tretie: šesť; štvrté: päť; piate: štyri

$$7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5\,880$$

odpoveď dostaneme, ak tieto možnosti sčítame

$$1\,470 + 5\,880 = 7\,350$$