Pravdepodobnosť zjednotenia a prieniku, nezlučiteľné javy

Ak máme jav, ktorý vznikol z dvoch ďalších javov prienikom (súčasne nastanú javy), jeho pravdepodobnosť počítame (ak je to možné) podobným spôsobom: počet priaznivých možností delíme s počtom všetkých možností. Je to ako hľadanie spoločných prvkov dvoch množín. Ak ten prienik bude prázdny (prázdna množina), potom tie javy nenastanú súčasne (prienik je nemožný jav). Takéto javy voláme nezlučiteľnými javmi – pravdepodobnosť ich prieniku sa rovná nule.

pr.: Napísali sme na ceduľky čísla od 1 do 100. Vložili sme ich do krabice. Náhodou vytiahnime jednu. Aká je pravdepodobnosť, že to číslo bude párne a násobkom 3?

A – vytiahneme párne číslo
B – vytiahneme násobok 3

do javu A patria elementárne javy (čísla): 2; 4; 6; 8; … ; 96; 98; 100

$P(A) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

do javu B patria elementárne javy: 3; 6; 9; 12; … ; 96; 99

$P(B) = \frac{33}{100} = 0{,}33$

prienik týchto javov obsahuje tie čísla, ktoré sú párne a zároveň násobok 3 – jednoduchšie povedané čísla deliteľné šiestimi: 6; 12; 18; … ; 90; 96

$P(A \cap B) = \frac{16}{100} = 0{,}16$

Ak máme jav, ktorý vznikol z dvoch ďalších javov zjednotením (aspoň jeden z javov nastane), pri určení počtu priaznivých možností musíme dávať pozor. Ak javy neboli nezlučiteľné, potom spoločné javy by sme rátali dvakrát. Preto od obyčajného súčtu pravdepodobnosti jednotlivých javov musíme odrátať pravdepodobnosť prieniku.

príklad:

Aká je pravdepodobnosť, že to číslo bude párne alebo násobkom 3?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}33 - 0{,}16 = 0{,}67$

Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden poplašný systém bude signalizovať krádež motorového vozidla, keď účinnosť prvého systému je 85 % a nezávislého druhého systému 75 %?

A – prvý poplašný systém signalizuje krádež
B – druhý poplašný systém signalizuje krádež

$P(A) = 0{,}85 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

$P(B) = 0{,}75 \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

to, že aspoň jeden systém signalizuje krádež, môžeme rozobrať na tri elementárne javy:

prvý signalizuje a druhý nie	$A \cap \bar{B}$
druhý signalizuje a prvý nie	$\bar{A} \cap B$
obidva signalizujú	$A \cap B$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A).P(\bar{B}) = 0{,}85.0{,}25 = 0{,}212\,5$

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}).P(B) = 0{,}15.0{,}75 = 0{,}112\,5$

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}85.0{,}75 = 0{,}637\,5$

odpoveď na otázku je súčet týchto pravdepodobností, nakoľko boli to elementárne javy → nezlučiteľné

$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}212\,5 + 0{,}112\,5 + 0{,}637\,5 = 0{,}962\,5$

Nemohli by sme to vypočítať jednoduchšie? Čo by bolo, keby sme rátali opačný jav? Čo je tu opačným javom? Opačný jav v tomto prípade je to, že ani jeden poplašný systém nebude signalizovať krádež.

$P(\bar{C}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = 0{,}15.0{,}25 = 0{,}037\,5$

využijeme vetu na pravdepodobnosť opačného javu

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}0375 = 0{,}962\,5$

Opačný jav a pravdepodobnosť opačného javu väčšinou vtedy využívame, ak samotný jav sa skladá z viacerých elementárnych javov, a ich pravdepodobnosti zvlášť musíme počítať.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma kockami padne párny súčin?

To by sme mohli zvládnuť priamym spôsobom.
Lebo súčin je vtedy párny, ak aspoň jeden činiteľ (jedno číslo) je párny. To znamená, že náš jav môžeme rozdeliť na tri elementárne javy:

a, na prvej párne a na druhej nepárne $P(A_1) = 0,5 . 0,5 = 0,25$
b, na prvej nepárne a na druhej párne $P(A_2) = 0,5 . 0,5 = 0,25$
c, na obidvoch párne $P(A_3) = 0,5 . 0,5 = 0,25$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,25 + 0,25 + 0,25$
$P(A) = 0,75$

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode desiatimi kockami padne párny súčin?

Tu už počet elementárnych javov sa rovná: $2^{10} - 1 = 1\ 023$. Toľko výpočtov by sme mali urobiť a na konci sčítať výsledky. Ale opačný jav obsahuje iba jeden elementárny jav.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode desiatimi kockami padne **nepárny** súčin?

Súčin iba vtedy je nepárny, ak násobím samé nepárne čísla.
$P(\bar{A}) = 0,5 . 0,5 . \ldots 0,5 = 0,5^{10} = 0,000\ 977$
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,000\ 977 = 0,999\ 023$