Pontok távolsága
(Vzdialenosť bodov)

A koordinátageometria (analitikus geometria) analitikai módszerekkel vizsgálja a geometriai alakzatokat. Vagyis a geometriai alakzatokat (pontok, egyenesek, másodrendű görbék – kúpszeletek, síkok) igyekszik számokkal (koordináták), egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel, egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerekkel kifejezni. Az alakzatok koordinátarendszerbe vannak elhelyezve (mi csak síkban dolgozunk). Szerkesztés helyett számokat helyettesítünk kifejezésekbe, egyenletekbe, egyenlőtlenségekbe; lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket, másodfokú egyenleteket, stb. oldunk meg.

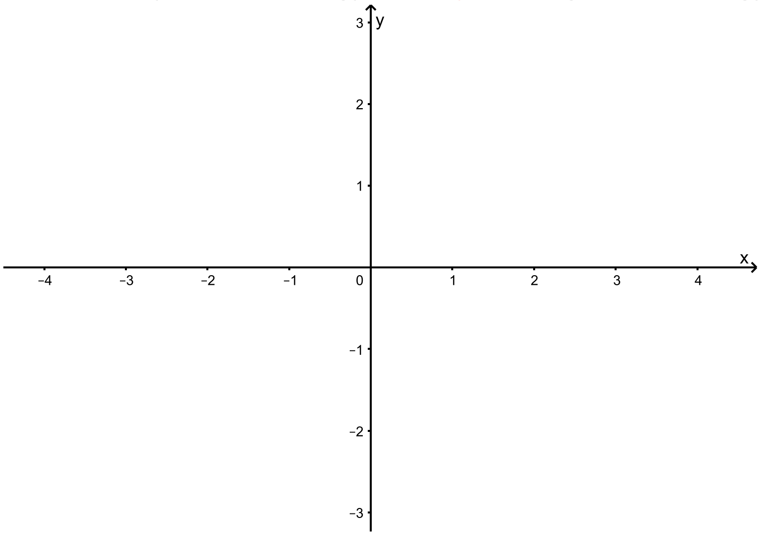
T. Ha egy pont illeszkedik valamely alakzathoz (egyenes, kör, ellipszis, …), és az alakzat adott egyenletével (vagy egyenletrendszerével), akkor behelyettesítve az illeszkedő pont koordinátáit az egyenletbe (egyenletrendszerbe), fennáll az egyenlőség.

Szükségünk van egy síkbeli koordináta-rendszerre:

két merőleges egyenes + azonos egységek a tengelyeken (*Descartes-féle koordináta-rendszer*)

az ilyen rendszerben minden pontnak két koordinátája van:

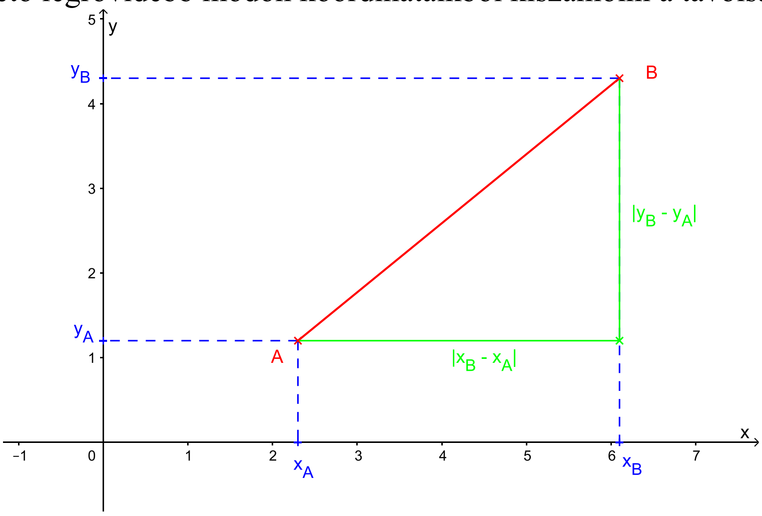
az első az x, a második az y: $C(c_1; c_2)$ vagy $C(x_C; y_C)$ estleg $C[c_1; c_2]$ vagy $C[x_C; y_C]$



Adottak az A és a B pontok úgy, hogy ismerjük koordinátáikat:

$A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

szeretnénk valahogy a lehető legrövidebb módon koordinátáikból kiszámolni a távolságukat – a szakasz hosszát



Az ábrán láthatunk egy derékszögű háromszöget, melyben az átfogó tulajdonképpen maga az AB szakasz – ennek hosszát szeretnénk meghatározni.

A vízszintes befogó hosszát megkapjuk, mint a pontok x koordinátáinak különbségét. Azért van ez a különbség abszolút értékben, mert a B pont lehet az A-hoz képest balra is (a balra lévő pontnak kisebb az x koordinátája: vagyis egy kisebb számból vonnánk ki egy nagyobbat), és így a különbség negatív számra jönne ki. Viszont távolságokat csak nemnegatív számokkal (pozitív vagy nulla) mérünk. Az abszolút érték garantálja nekünk a különbség nemnegatív mivoltát.

A függőleges befogó hosszát pedig a pontok y koordinátáinak különbsége adja (természetesen ez is abszolút értékben).

A derékszögű hűromszögben érvényes a Pitagorasz tétel – itt is alkalmazható. Kicsit alakítjuk, és megkapjuk a síkbeli pontok távolságának kiszámítására vonatkozó képletet.

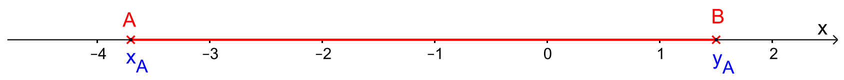
$$|AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Mivel az ellentett számok négyzete egyenlő $[7^2 = (-7)^2]$, az abszolút érték (mely a negatív számokból ellentett számot készít, azaz pozitívet) fölöslegessé válik → helyettesíthetjük közönséges zárójellel. Még gyököt vonunk egyenletünkből, és kész is az összefüggés.

T. $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

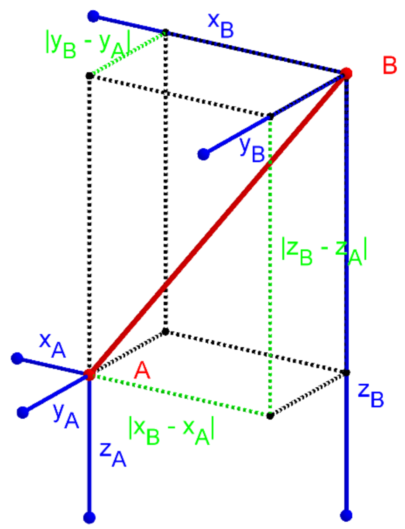
M. Ha a számegyenesen dolgozunk (x tengely) – *egydimenziós tér*, ahol minden pontnak csak egy koordinátája van: $C(x_C)$, akkor a két pont távolságának kiszámítására egyszerűbb alakot kapunk: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$. Ami tulajdonképpen írható:

$$|AB| = |x_B - x_A|$$



Ha pedig a terünket kiterjesztjük a klasszikus háromdimenziós térre, ahol minden pontnak három koordinátája van: $C(x_C; y_C; z_C)$, akkor a pontok távolsága tulajdonképpen a téglatest testátlójának kiszámítását jelenti. Téglatestünk éleinek hossza a pontok egyes koordinátáinak pozitív különbsége (abszolút értéke). A Pitagorasz tétel kétszeri alkalmazásával – először az alaplap átlójának számításához oldalaiból (a és b); majd magának a testátlónak a számításánál az alaplap átlójából és a harmadik méretből (c).

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



példa:

Számítsuk ki a pontok távolságát:

a, $A(7; 11); B(13; 12)$ b, $C(-3; -2); D(-7; -9)$ c, $E(4; -5); F(-5; 4)$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(13 - 7)^2 + (12 - 11)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2}$

$|AB| = \sqrt{37} = 6{,}082$

$|CD| = \sqrt{\left(-7 - (-3)\right)^2 + \left(-9 - (-2)\right)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$

$|CD| = \sqrt{65} = 8{,}062$

$|EF| = \sqrt{(-5-4)^2 + (4-(-5))^2} = \sqrt{(-9)^2 + 9^2}$

$|EF| = \sqrt{162} = 12{,}728$

Adott az ABC háromszög csúcsaival: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7). Számítsuk ki a kerületét.

$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-8)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}657$

$b = |AC| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

$c = |AB| = \sqrt{(8-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10{,}770$

$o = a + b + c = 5{,}657 + 10 + 10{,}770$

$o = 26{,}427$

Adott az ABC háromszög csúcsaival: A(10; 1); B(3; 4); C(8; y_C). Határozzuk meg a C pont hiányzó koordinátáját úgy, hogy háromszögünk derékszögű legyen derékszögével a C csúcsnál.

$c^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (3 - 10)^2 + (4 - 1)^2 = (-7)^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$

$a^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (8 - 3)^2 + (y_C - 4)^2 = 5^2 + (y_C - 4)^2 = 25 + (y_C - 4)^2$

$b^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (8 - 10)^2 + (y_C - 1)^2 = (-2)^2 + (y_C - 1)^2 = 4 + (y_C - 1)^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$58 = 25 + (y_C - 4)^2 + 4 + (y_C - 1)^2$

$58 = 25 + y_C^2 - 8y_C + 16 + 4 + y_C^2 - 2y_C + 1$

$58 = 2y_C^2 - 10y_C + 46$

$0 = 2y_C^2 - 10y_C - 12$

$0 = y_C^2 - 5y_C - 6$

$0 = (y_C + 1)(y_C - 6)$

$y_C + 1 = 0$ $\qquad$ $y_C - 6 = 0$

$y_{C1} = -1$ $\qquad$ $y_{C2} = 6$