A számtani sorozat
(Aritmetická postupnosť)

pl.

$\langle a_n \rangle$: 1; 2; 3; 4; 5; …
$\langle b_n \rangle$: 23; 19; 15; 11; 7; …
$\langle c_n \rangle$: -4,2; -3,9; -3,6; -3,3; -3; …

D. Egy ***sorozatot számtani***nak nevezünk**,** ha bármely két, egymást követő tagjának különbsége állandó. Ezt az állandó különbséget ***a számtani sorozat differenciájá***nak (diferencia aritmetickej postupnosti) nevezzük és d betűvel jelöljük.

$$\exists d \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: d = a_{n+1} - a_n$$

M. Természetesen a különbség számításánál mindig a sorozat következő tagjából vonjuk ki az előtte lévőt.

Ha rendezzük az összefüggést – kifejezzük belőle a következő tagot, akkor megkapjuk a számtani sorozat tagjainak rekurzív módon történő meghatározását. Ha hozzáadom valamely taghoz a differenciát, a számtani sorozat következő tagját kapom.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Ha pedig átviszem a differenciát a másik oldalra, kapom:

$$a_{n+1} - d = a_n$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a számtani sorozat előző tagját úgy kapom meg, hogyha levonom a differenciát a következő tagból.

Térjünk vissza az első alakhoz, és konkretizáljuk:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2.d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2.d) + d = a_1 + 3.d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3.d) + d = a_1 + 4.d$$

Ha ezt általánosítjuk, megkapjuk az első képletet:

T. a sorozat általános (n-edik) tagjának kiszámítása az első tag és a differencia segítségével

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

Vagyis a számtani sorozat bármely tagját kiszámolhatjuk az első tag és a differencia ismeretében.

Most fejezzünk ki a sorozat egy másik (r-edik) tagját. Ebből kifejezve az első tagot, azt behelyettesítjük az első képletbe:

$$a_r = a_1 + (r-1).d \;\rightarrow\; a_r - (r-1).d = a_1$$
$$a_n = a_r - (r-1).d + (n-1).d = a_r - r.d + d + n.d - d = a_r - r.d + n.d = a_r + d(-r+n)$$

T. a sorozat egy tagjának (n-edik) kiszámítása egy másik tag (r-edik) és a differencia segítségével

$$a_n = a_r + (n-r).d$$

Azaz a számtani sorozat bármely tagját kiszámolhatjuk egy másik tag és a differencia ismeretében.

Hogy „értsük" ezt a két képletet egyszerre?
Ha a számtani sorozat későbbi tagját (nagyobb indexű/sorszámú) számítjuk egy korábbiból (kisebb indexű), akkor a differencia annyiszorosát adjuk hozzá, amennyivel később szerepel a sorban a keresett tag. Ha korábbi tagot számolunk egy későbbiből, akkor a differencia annyiszorosát vonjuk le.

az n-edik részletösszeg – a sorozat első n tagjának összege

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

minden tagot az első tag és a differencia segítségével fejezünk ki

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + (a_1 + [n-2]d) + (a_1 + [n-1]d)$$

minden tagot az n-edik tag és a differencia segítségével fejezünk ki

$$s_n = (a_n - [n-1]d) + (a_n - [n-2]d) + (a_n - [n-3]d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

adjuk össze az egyenleteket

$$2.s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

a jobboldalon a zárójelekben szereplő összeg pontosan n-szer szerepel

$2.s_n = n.(a_1 + a_n)$ /:2

T. a számtani sorozat első n tagjának összege

$$s_n = \frac{a_1+a_n}{2}.n$$

A számtani sorozat első n tagjának összegét megkapom, ha a szélső tagok számtani közepét megszorzom az összeadott számok darabszámával.

És végül miért kapta a sorozat éppen azt az elnevezést, hogy számtani? Vegyük a sorozat három, egymás után következő tagját. Fejezzük ki a két szélsőt a középső segítségével:

$a_n; a_{n+1}; a_{n+2}$

$a_n = a_{n+1} - d$

$a_{n+2} = a_{n+1} + d$

adjuk össze az egyenleteket

$a_n + a_{n+2} = a_{n+1} - d + a_{n+1} + d$

$a_n + a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1}$

$a_n + a_{n+2} = 2.a_{n+1}$ /:2

$$a_{n+1} = \frac{a_n+a_{n+2}}{2}$$

T. A számtani sorozat bármely tagja (kivéve az elsőt) a szomszéd tagok számtani közepe.

példa:

Írjuk fel a számtani sorozat első öt tagját, ha:

a, $a_1 = 7; d = 6$ b, $b_4 = 1; d = -0,2$ c, $c_{18} = -9; d = 3$

d, $e_7 = 14; e_8 = 5$ e, $f_6 = -5; f_{10} = 19$

a, $a_2 = a_1 + d = 7 + 6 = 13$

$a_3 = a_2 + d = 13 + 6 = 19$

$a_4 = a_3 + d = 19 + 6 = 25$

$a_5 = a_4 + d = 25 + 6 = 31$

---

b, $b_5 = b_4 + d = 1 + (-0,2) = 0,8$

$b_3 = b_4 - d = 1 - (-0,2) = 1,2$

$b_2 = b_3 - d = 1,2 - (-0,2) = 1,4$

$b_1 = b_2 - d = 1,4 - (-0,2) = 1,6$

---

c, a c számtani sorozat első tagja a 17-tel korábban van, mint az adott 18-ik tag

$c_1 = c_{18} - 17.d = -9 - 17.3 = -9 - 51 = -60$

$c_2 = c_1 + d = -60 + 3 = -57$

$c_3 = -57 + 3 = -54$

$c_4 = -54 + 3 = -51$

$c_5 = -51 + 3 = -48$

---

d, adott a számtani sorozat két egymás után következő tagja – különbségük a differenciával egyenlő

$d = d_8 - d_7 = 5 - 14 = -9$

$e_1 = e_7 - 6.d = 14 - 6.(-9) = 68$

$e_2 = e_1 + d = 68 + (-9) = 59$

$e_3 = 59 + (-9) = 50$

$e_4 = 50 + (-9) = 41$

$e_5 = 41 + (-9) = 32$

---

e, adott a számtani sorozat két tagja – különbségük annyiszorosa a differenciának, amennyi a két tag sorszáma között a különbség

$4.d = f_{10} - f_6 = 19 - (-5) = 24$

$d = 6$

$f_1 = f_6 - 5.d = -5 - 5.6 = -35$

$f_2 = f_1 + d = -35 + 6 = -29$

$f_3 = -29 + 6 = -23$
$f_4 = -23 + 6 = -17$
$f_5 = -17 + 6 = -11$

Fejezzük ki a számtani sorozat n-edik tagját az n segítségével, ha

a, $a_1 = 6;\ d = 7$ b, $b_8 = 11;\ d = -2$

a, $a_n = a_1 + (n-1).d = 6 + (n-1).7 = 6 + 7n - 7 = 7n - 1$

---

b, $b_n = b_8 + (n-8).d = 11 + (n-8).(-2) = 11 - 2n + 16 = 27 - 2n$

Határozzuk meg a számtani sorozat első-, n-edik tagját és az s_n-t:

a, $a_{14} = 33;\ d = \frac{2}{5};\ n = 20$ b, $b_{30} = -20;\ d = -0{,}1;\ n = 50$

a, $a_1 = a_{14} - 13.d = 33 - 13.\frac{2}{5} = 33 - \frac{26}{5} = \frac{139}{5}$

$a_{20} = a_{14} + 6.d = 33 + 6.\frac{2}{5} = 33 + \frac{12}{5} = \frac{177}{5}$

$s_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}.20 = \frac{\frac{139}{5} + \frac{177}{5}}{2}.20 = \frac{316}{5}.10 = 158$

---

b, $b_1 = b_{30} - 29.d = -20 - 29.(-0{,}1) = -20 + 2{,}9 = -17{,}1$

$b_{50} = b_{30} + 20.d = -20 + 20.(-0{,}1) = -20 - 2 = -22$

$s_{50} = \frac{b_1 + b_{50}}{2}.50 = \frac{-17{,}1 + (-22)}{2}.50 = -39{,}1.25 = -977{,}5$

A számtani sorozatban adottak:

a, $a_1 = -13;\ d = 4;\ a_n = 59$. Kiszámítandó n, s_n;
b, $d = -3;\ s_{16} = -280$. Kiszámítandó b_1, b_{16};

a, $a_n = a_1 + (n-1).d = -13 + (n-1).4 = -13 + 4n - 4 = 4n - 17$

$59 = 4n - 17 \qquad /+17$
$76 = 4n \qquad /:4$
$19 = n$

$s_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2}.19 = \frac{-13 + 59}{2}.19 = 23.19 = 437$

---

b, $b_{16} = b_1 + 15.d = b_1 + 15.(-3) = b_1 - 45$

$s_{16} = \frac{b_1 + b_{16}}{2}.16 = (b_1 + b_1 - 45).8 = 16b_1 - 360$

$-280 = 16b_1 - 360 \qquad /+360$
$80 = 16b_1 \qquad /:16$
$5 = b_1$

$b_{16} = b_1 - 45 = 5 - 45 = -40$

Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját, ha érvényes:

a, $a_3 + a_6 + a_8 = 17$
$a_2 - a_4 - a_5 = -11$

b, $2b_4 - 3b_7 = 15$
$b_2 + 4b_5 - b_6 = 12$

a, minden tagot az első tag és a differencia segítségével fejezünk ki – vigyázzunk az előjelekre

$a_1 + 2d + a_1 + 5d + a_1 + 7d = 17$
$a_1 + d - (a_1 + 3d) - (a_1 + 4d) = -11$

$3a_1 + 14d = 17$
$-a_1 - 6d = -11 \qquad /.3$

$3a_1 + 14d = 17$
$-3a_1 - 18d = -33 \qquad /\mathrm{I.} + \mathrm{II.}$
$-4d = -16 \qquad /:(-4)$
$d = 4$

$-a_1 - 6.4 = -11$

$-a_1 - 24 = -11 \quad /+24$

$-a_1 = 13 \quad /.(-1)$

$a_1 = -13$

---

b,

$$\begin{aligned} 2.(b_1 + 3d) - 3(b_1 + 6d) &= 15 \\ b_1 + d + 4.(b_1 + 4d) - (b_1 + 5d) &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b_1 + 6d - 3b_1 - 18d &= 15 \\ b_1 + d + 4b_1 + 16d - b_1 - 5d &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b_1 - 12d &= 15 \\ 4b_1 + 12d &= 12 \end{aligned}$$

$3b_1 = 27 \quad /:3$

$b_1 = 9$

$-9 - 12d = 15 \quad /+9$

$-12d = 24 \quad /:(-12)$

$d = -2$